

境界要素法によるレトルト食品のレトルト殺菌中の温度の計算

寺島 好己

Estimation of Temperatures of Heat Conductive Foods in Retortable Pouches during Heat Sterilization using the Boundary Element Method (BEM)

Yoshimi Terajima

At the present time, there are four numerical methods used for treating partial differential equations: the finite difference method (FDM), the finite element method (FEM), the finite volume method (FVM), and the boundary element method (BEM). They have been applied to many heat and mass transfer problems.

However, for the direct application of the BEM to solving heat transfer problems arising in the thermal processing of foods packaged in hermetically sealed containers, no studies have been reported. In this paper, the BEM is applied to one dimensional heat conduction equation for estimating temperatures of heat conductive foods in retortable pouches during heat sterilization.

Key words : boundary element method, BEM, heat conductive food, retortable pouch, heat sterilization, temperature distribution.

1. はじめに

偏微分方程式の数値解法としては、現在、つぎの4つの方法がよく知られている。すなわち、差分法 (FDM)、有限要素法 (FEM)、有限体積法 (FVM)、および境界要素法 (BEM) である。境界要素法¹⁾は有限要素法の後に登場した比較的新しい方法であり、電磁気学、構造力学、流体力学、熱伝導学などの問題に応用されているが、グリーン関数を導入する関係で数値解を導く過程においてやや高度な数学的知識が要求される。

しかしながら、境界要素法 (BEM) がレトルト殺菌中の容器詰食品の温度計算に応用された例は現在のところ見当たらない。そこで、境界要素法を応用して1次元熱伝導方程式の数値解を求める方法を検討した。そして、その方法に基づいてレトルト殺菌中のレトルト食品の温度を計算するプログラムを作成し、実際に計算を行ったのでその結果について報告する。

2. 熱伝導方程式の無次元化

境界要素法 (BEM) を熱伝導方程式に適用する場合熱伝導方程式を無次元化しておく都合がよい。そこで1次元熱伝導方程式を無次元化することを考える。

1) 境界で温度が与えられるとき

このときは、つぎの式(2.1)~(2.4)が与えられる場合が多い.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

$$u = u_1 \quad \text{at } x = 0 \quad (2.2)$$

$$u = u_2 \quad \text{at } x = a \quad (2.3)$$

$$u = u_0 \quad \text{when } t = 0 \quad (2.4)$$

ただし, u = 温度

α = 温度伝導率 ($\alpha = k/C_p \gamma$)

k = 熱伝導率

C_p = 比熱

γ = 比重量

u_1 = 境界温度 (at $x = 0$)

u_2 = 境界温度 (at $x = a$)

u_0 = 初期温度

a = 被加熱体の厚み

x = 被加熱体の厚み方向の座標

t = 時間

ここで, $u' = u/u_0$, $x' = x/a$, $t' = \alpha t/a^2$ とおく, すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = u_0 \frac{\partial u'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = u_0 \frac{\partial u'}{\partial t'} \cdot \frac{\alpha}{a^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = u_0 \frac{\partial u'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = u_0 \frac{\partial u'}{\partial x'} \cdot \frac{1}{a} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{u_0}{a} \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{u_0}{a} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \cdot \frac{1}{a} \quad (2.7)$$

が得られる. また, $u'_1 = u_1/u_0$, $u'_2 = u_2/u_0$, $u'_0 = u_0/u_0 = 1$ とし, 式(2.5), (2.6), (2.7)を式(2.1)に代入すれば,

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \quad (2.8)$$

$$u' = u'_1 \quad \text{at } x' = 0 \quad (2.9)$$

$$u' = u'_2 \quad \text{at } x' = 1 \quad (2.10)$$

$$u' = 1 \quad \text{when } t' = 0 \quad (2.11)$$

となる. ここで, $t' \rightarrow t$, $x' \rightarrow x$, $u' \rightarrow u$, $u'_1 \rightarrow u_1$, $u'_2 \rightarrow u_2$ とおけば,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

$$u = u_1 \quad \text{at } x = 0 \quad (2.13)$$

$$u = u_2 \quad \text{at } x = 1 \quad (2.14)$$

$$u = 1 \quad \text{when } t = 0 \quad (2.15)$$

となる、式(2.12)～(2.15)が式(2.1)～(2.4)を無次元化した式である。

2) 境界で熱伝達があるとき

この場合は、つぎの式(2.16)～(2.19)が与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} = h_1 (u_1 - u) \quad \text{at } x = 0 \quad (2.17)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} = h_2 (u - u_2) \quad \text{at } x = a \quad (2.18)$$

$$u = u_0 \quad \text{when } t = 0 \quad (2.19)$$

ただし、 h_1 = 熱伝達率 (at $x = 0$)

h_2 = 熱伝達率 (at $x = a$)

1) と同様に考えると、式(2.17), (2.18)は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = u_0 \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{1}{a} \quad (2.20)$$

$$-u_0 \frac{\partial u'}{\partial x'} \cdot \frac{1}{a} = \frac{h_1}{k} (u'_1 u_0 - u' u_0) \quad \text{at } x' = 0 \quad (2.21)$$

$$-u_0 \frac{\partial u'}{\partial x'} \cdot \frac{1}{a} = \frac{h_2}{k} (u' u_0 - u'_2 u_0) \quad \text{at } x' = 1 \quad (2.22)$$

式(2.21), (2.22)を整理すると、つぎの式が得られる。

$$-\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{h_1 a}{k} (u'_1 - u') \quad \text{at } x' = 0 \quad (2.23)$$

$$-\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{h_2 a}{k} (u' - u'_2) \quad \text{at } x' = 1 \quad (2.24)$$

さらに整理して、 $u' \rightarrow u$, $u'_1 \rightarrow u_1$, $u'_2 \rightarrow u_2$, $x' \rightarrow x$ とおくと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = B_1 (u_1 - u) \quad \text{at } x=0 \quad (2.26)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = B_2 (u - u_2) \quad \text{at } x=1 \quad (2.27)$$

$$u=1 \quad \text{when } t=0 \quad (2.28)$$

となる。ただし、

$$B_1 = \frac{h_1 a}{k} \quad (2.29)$$

$$B_2 = \frac{h_2 a}{k} \quad (2.30)$$

である。\$B_1, B_2\$ はビオ数 (Biot number) とよばれる無次元の値を表わす。

3. 境界要素法

3.1 積分方程式

いま、重み関数 \$v\$ を導入し、熱伝導方程式を \$0 \leq \xi \leq 1, t_0 \leq \tau \leq t\$ の区間で積分した式 (3.1) を考えてみる²⁾。

$$\int_{t_0}^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) v \, d\xi \, d\tau = 0 \quad (3.1)$$

ただし、\$u = u(\xi, \tau)\$ である。

$$\int_{t_0}^t \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \tau} v \, d\xi \, d\tau - \int_{t_0}^t \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} v \, d\xi \, d\tau = 0$$

第1項と第2項を部分積分する。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \tau} v \, d\xi \, d\tau &= \int_0^1 \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \tau} v \, d\tau \, d\xi \\ &= \int_0^1 [u v]_{t_0}^t \, d\xi - \int_0^1 \int_{t_0}^t u \frac{\partial v}{\partial \tau} \, d\tau \, d\xi \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{note : } X = v \quad dY = \frac{\partial u}{\partial \tau} \, d\tau$$

$$dX = \frac{\partial v}{\partial \tau} \, d\tau \quad Y = u$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} v \, d\xi \, d\tau &= \int_{t_0}^t \left[v \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_0^1 d\tau - \int_{t_0}^t \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \, d\xi \, d\tau \\
\text{note : } X &= v & dY &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} d\xi \\
dX &= \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi & Y &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \\
&= \int_{t_0}^t \left[v \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_0^1 d\tau - \int_{t_0}^t \left[u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right]_0^1 d\tau + \int_{t_0}^t \int_0^1 u \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \, d\xi \, d\tau \quad (3.3) \\
\text{note : } X &= \frac{\partial v}{\partial \xi} & dY &= \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi \\
dX &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} d\xi & Y &= u
\end{aligned}$$

式(3.1), (3.2), (3.3) よりつぎの式が成り立つ.

$$\int_0^1 [u v]_{t_0}^t d\xi - \int_{t_0}^t \left[v \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_0^1 d\tau + \int_{t_0}^t \left[u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right]_0^1 d\tau - \int_{t_0}^t \int_0^1 u \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) d\xi \, d\tau = 0 \quad (3.4)$$

ここで重み関数 v としてつぎの方程式(3.5)の解 $V(\xi, \tau; x, t)$ をとるのが境界要素法の基本となる考え方である³⁾.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.5)$$

$$V(\xi, \tau; x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\} \quad (3.6)$$

すると式(3.4) はつぎのようになる.

$$\int_0^1 [u V]_{t_0}^t d\xi - \int_{t_0}^t \left[V \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_0^1 d\tau + \int_{t_0}^t \left[u \frac{\partial V}{\partial \xi} \right]_0^1 d\tau = 0 \quad (3.7)$$

さらに書きかえると,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 u(\xi, t) V(\xi, t; x, t) d\xi - \int_0^1 u(\xi, t_0) V(\xi, t_0; x, t) d\xi \\
&- \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} V(1, \tau; x, t) d\tau + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} V(0, \tau; x, t) d\tau \\
&+ \int_{t_0}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau - \int_{t_0}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau = 0 \quad (3.8)
\end{aligned}$$

式(3.8)の左辺第1項以外の項は積分可能であるが、 $V(\xi, t; x, t)$ は値が定まらないのでこのままでは積分できない。

そこである正数 ε を導入し、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 u(\xi, t) V(\xi, t; x, t + \varepsilon) d\xi$$

を計算するとつぎのような結果が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(\xi, t) V(\xi, t; x, t) d\xi &= \frac{1}{2} u(x, t) & x=0, 1 \text{ のとき} \\ &= u(x, t) & 0 < x < 1 \text{ のとき} \end{aligned} \quad (3.9)$$

なぜ、このようになるかは巻末の付録参照。

式(3.8)より、 $x=0$ と $x=1$ ではつぎの式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(x, t) &= \int_{t_0}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau - \int_{t_0}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau \\ &\quad - \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) V(0, \tau; x, t) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) V(1, \tau; x, t) d\tau \\ &\quad + \int_0^1 u(\xi, t_0) V(\xi, t_0; x, t) d\xi \end{aligned} \quad (3.10)$$

また、 $0 < x < 1$ ではつぎの式が成り立つ。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{t_0}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau - \int_{t_0}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau \\ &\quad - \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) V(0, \tau; x, t) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) V(1, \tau; x, t) d\tau \\ &\quad + \int_0^1 u(\xi, t_0) V(\xi, t_0; x, t) d\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

式(3.10)、(3.11)が1次元熱伝導方程式に境界要素法を応用するときに基礎となる積分方程式である。

3.2 境界と内部に関する方程式

式(3.10)より, $x=0, 1$ における積分方程式はつぎようになる.

($x=0$ のとき)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(0, t) = & \int_{t_0}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, t) d\tau - \int_{t_0}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, t) d\tau \\ & - \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) V(0, \tau; 0, t) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) V(1, \tau; 0, t) d\tau \\ & + \int_0^1 u(\xi, t_0) V(\xi, t_0; 0, t) d\xi \end{aligned} \quad (3.12)$$

($x=1$ のとき)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(1, t) = & \int_{t_0}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, t) d\tau - \int_{t_0}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, t) d\tau \\ & - \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) V(0, \tau; 1, t) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) V(1, \tau; 1, t) d\tau \\ & + \int_0^1 u(\xi, t_0) V(\xi, t_0; 1, t) d\xi \end{aligned} \quad (3.13)$$

($0 < x < 1$ のとき) 式(3.11)であるが, 再度書いておく.

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{t_0}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau - \int_{t_0}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau \\ & - \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) V(0, \tau; x, t) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) V(1, \tau; x, t) d\tau \\ & + \int_0^1 u(\xi, t_0) V(\xi, t_0; x, t) d\xi \end{aligned} \quad (3.14)$$

式(3.12), (3.13), (3.14)において十分に小さい $\Delta t(>0)$ をえらんで $t_0=t-\Delta t$ とおけば, これらの式はつぎようになる.

($x=0$ のとき)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(0, t) = & \int_{t-\Delta t}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, t) d\tau - \int_{t-\Delta t}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, t) d\tau \\ & - \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) V(0, \tau; 0, t) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) V(1, \tau; 0, t) d\tau \\ & + \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \end{aligned} \quad (3.15)$$

(x=1 のとき)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u(1, t) = & \int_{t-\Delta t}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, t) d\tau - \int_{t-\Delta t}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, t) d\tau \\
& - \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) V(0, \tau; 1, t) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) V(1, \tau; 1, t) d\tau \\
& + \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 1, t) d\xi
\end{aligned} \quad (3.16)$$

(0 < x < 1 のとき)

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \int_{t-\Delta t}^t u(0, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau - \int_{t-\Delta t}^t u(1, \tau) \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau \\
& - \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) V(0, \tau; x, t) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) V(1, \tau; x, t) d\tau \\
& + \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi
\end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで、 $t-\Delta t \leq \tau \leq t$ では、 u と $\partial u / \partial \xi$ の変化は V と $\partial V / \partial \xi$ の変化にくらべて小さいと考えれば式 (3.15), (3.16), (3.17) はつぎのように考えてもよい¹⁾。

(x=0 のとき)

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 0, t) d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, t) - \left[\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 0, t) d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, t) \\
= & - \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \\
& + \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, t) d\tau \right] u(1, t) - \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, t) d\tau \right] u(0, t) \\
& + \frac{1}{2} u(0, t)
\end{aligned} \quad (3.18)$$

(x=1 のとき)

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 1, t) d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, t) - \left[\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 1, t) d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, t) \\
= & - \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 1, t) d\xi \\
& + \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, t) d\tau \right] u(1, t) - \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, t) d\tau \right] u(0, t) \\
& + \frac{1}{2} u(1, t)
\end{aligned} \quad (3.19)$$

($0 < x < 1$ のとき)

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \int_0^1 u(\xi, t - \Delta t) V(\xi, t - \Delta t; x, t) d\xi \\
 & - \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau \right] u(1, t) + \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau \right] u(0, t) \\
 & + \left[\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; x, t) d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, t) - \left[\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; x, t) d\tau \right] \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, t)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ここまでは、現在までに出版されている参考書をひもとけば誰でも到達できるであろう。しかし、式(3.18), (3.19), (3.20)を実際の温度計算にどのようにあてはめたらよいかについて説明している参考書は見当たらない。

次章以下では、式(3.18), (3.19), (3.20)を温度計算にどのようにあてはめるかについて考えてみたい。

4. 境界要素法による熱伝導方程式の数値解

4.1 境界要素法による数値解の求め方

1) 境界温度が与えられる場合

このときは、 $u(0, t)$ と $u(1, t)$ が与えられる。また、初期温度 $u(\xi, 0)$ も与えられる。このとき、式(3.18), (3.19)で、

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(1, t) \text{ と } \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, t)$$

以外は全て与えられるか計算できるので、式(3.18), (3.19)の連立方程式を解いて $\partial u(1, t)/\partial \xi$ と $\partial u(0, t)/\partial \xi$ を求めることができる。

つぎに、式(3.20)に $u(0, t)$, $u(1, t)$, $\partial u(0, t)/\partial \xi$, $\partial u(1, t)/\partial \xi$ を代入して、内点の温度 $u(x, t)$ が計算できる。以上の計算において $u(\xi, t - \Delta t)$ は Δt 時間前の値である。

2) 境界で熱伝達がある場合

このときは、

$$-\frac{\partial u}{\partial \xi}(0, t) = B_1 \{T_1 - u(0, t)\} \tag{4.1}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \xi}(1, t) = B_2 \{u(1, t) - T_2\} \tag{4.2}$$

ただし、 $T_1 = u_{1A}/u_0$

$T_2 = u_{2A}/u_0$

u_{1A} : $x=0$ における周囲温度

u_{2A} : $x=1$ における周囲温度

u_0 : 初期温度 ($u(x, 0) = u_0$)

B_1, B_2 : Biot number

($x=0$ のとき) 式(4.1), (4.2) を式(3.18) に代入する.

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 0, t) d\tau \right] \cdot B_2 \{T_2 - u(1, t)\} \\
 & - \left[\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 0, t) d\tau \right] \cdot B_1 \{u(0, t) - T_1\} \\
 & = - \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \\
 & + \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, t) d\tau \right] u(1, t) - \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, t) d\tau \right] u(0, t) \\
 & + \frac{1}{2} u(0, t)
 \end{aligned}$$

未知数を左辺に集めて整理するとつぎの式が得られる.

$$\begin{aligned}
 & \left[-B_2 \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 0, t) d\tau - \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, t) d\tau \right] u(1, t) \\
 & + \left[-B_1 \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 0, t) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, t) d\tau - \frac{1}{2} \right] u(0, t) \\
 & = -B_2 T_2 \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 0, t) d\tau - B_1 T_1 \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 0, t) d\tau \\
 & - \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

($x=1$ のとき) 式(4.1), (4.2) を式(3.19) に代入する.

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 1, t) d\tau \right] \cdot B_2 \{T_2 - u(1, t)\} \\
 & - \left[\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 1, t) d\tau \right] \cdot B_1 \{u(0, t) - T_1\} \\
 & = - \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 1, t) d\xi \\
 & + \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, t) d\tau \right] u(1, t) - \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, t) d\tau \right] u(0, t) \\
 & + \frac{1}{2} u(1, t)
 \end{aligned}$$

未知数を左辺に集めて整理するとつぎの式が得られる.

$$\begin{aligned}
& \left[-B_2 \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 1, t) d\tau - \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, t) d\tau - \frac{1}{2} \right] u(1, t) \\
& + \left[-B_1 \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 1, t) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, t) d\tau \right] u(0, t) \\
& = -B_2 T_2 \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 1, t) d\tau - B_1 T_1 \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 1, t) d\tau \\
& \quad - \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 1, t) d\xi \tag{4.4}
\end{aligned}$$

($0 < x < 1$ のとき) 式(4.1), (4.2) を式(3.20) に代入する.

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi \\
& - \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau \right] u(1, t) + \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau \right] u(0, t) \\
& + \left[\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; x, t) d\tau \right] \cdot B_2 \{T_2 - u(1, t)\} \\
& - \left[\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; x, t) d\tau \right] \cdot B_1 \{u(0, t) - T_1\}
\end{aligned}$$

さらに整理するとつぎの式が得られる.

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi \\
& + \left[- \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau - B_2 \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; x, t) d\tau \right] u(1, t) \\
& + \left[\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau - B_1 \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; x, t) d\tau \right] u(0, t) \\
& + B_2 T_2 \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; x, t) d\tau \\
& + B_1 T_1 \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; x, t) d\tau \tag{4.5}
\end{aligned}$$

式(4.3), (4.4) から時間 t における $u(0, t)$, $u(1, t)$ が計算できるので, これらの値を式(4.5) に代入すれば, $u(x, t)$ ($0 < x < 1$) を求めることができる.

4.2 積分方程式の各積分項の計算

4.2.1 $x=0, 1$ における積分項の計算

式(3.18), (3.19), (3.20) あるいは式(4.3), (4.4), (4.5) を計算するためには, 各式の中の積分項を計算しなければならない. 当初どのように計算したらよいかがわからなかったが, 何とかゴールにたどりつくことができた. ここまで計算を進めることができたのは参考文献⁴⁾に負うところ大である. いまは亡き先達の師に深甚なる敬意を表したい.

1) $\int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi$ の計算

いま, $x=0 \sim 1$ の間を N 分割したとし, 分割した点の座標を $l_0 (=0), l_1, l_2, \dots, l_{N-1}, l_N (=1)$ とすると, つぎの式が成り立つ.

$$\int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi = \sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \quad (4.6)$$

$u(\xi, t-\Delta t)$ は Δt 時間前の点 $\xi (0 \leq \xi \leq 1)$ の温度であるが, l_{i-1} と l_i の中間点の値で代表させることにすれば, $u(\xi, t-\Delta t)$ を積分の外に出すことができるので

$$\int_{l_{i-1}}^{l_i} V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \text{ が計算できればよいことになる.}$$

そこでこの積分を計算してみる. $V(\xi, \tau; x, t)$ は式(3.6)より

$$V(\xi, \tau; x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\} \quad (4.7)$$

となる. すると

$$\begin{aligned} & \int_{l_{i-1}}^{l_i} V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \\ &= \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Delta t}} \exp \left\{ -\frac{(0-\xi)^2}{4\Delta t} \right\} d\xi = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Delta t}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4\Delta t} \right\} d\xi \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{ここで } t = \frac{\xi^2}{4\Delta t} \text{ とおくと } dt = \frac{1}{\sqrt{4\Delta t}} d\xi$$

$$= \int_{\frac{l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\frac{l_i}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{l_i}{\sqrt{4\Delta t}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}} \right) \quad (4.10)$$

$$\text{note: } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{誤差関数}$$

2) $\int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 1, t) d\xi$ の計算

$x=0$ のときと同様に考えればよい.

$$\begin{aligned} & \int_{l_{i-1}}^{l_i} V(\xi, t-\Delta t; 1, t) d\xi \\ &= \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Delta t}} \exp \left\{ -\frac{(1-\xi)^2}{4\Delta t} \right\} d\xi \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
& \text{ここで } t = \frac{1-\xi}{\sqrt{4\Delta t}} \text{ とおくと } dt = \frac{-1}{\sqrt{4\Delta t}} d\xi \\
& = \int_{\frac{1-l_i}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\frac{1-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}} -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\
& = \int_{\frac{1-l_i}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\frac{1-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\
& = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1-l_i}{\sqrt{4\Delta t}}\right) \tag{4.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{note: } y &= \int_a^b -f(x) dx = -\left[F(x)\right]_a^b = -F(b) + F(a) \\
&= \left[F(x)\right]_b^a \\
&= \int_b^a f(x) dx
\end{aligned}$$

3) $\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 0, t) d\tau$ の計算

まず, つぎの式について考えてみる.

$$\begin{aligned}
& \int_{t-\Delta t}^t V(\xi, \tau; x, t) d\tau \\
&= \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau \\
& \quad \sigma = \tau - (t - \Delta t) \text{ とおけば } d\sigma = d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \sigma)}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\Delta t - \sigma)}\right\} d\sigma \\
&= \int_0^{\Delta t} V(\xi, \sigma; x, \Delta t) d\sigma \\
& \quad \sigma \rightarrow \tau \text{ と書いてもよいので} \\
&= \int_0^{\Delta t} V(\xi, \tau; x, \Delta t) d\tau \tag{4.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 0, t) d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} V(1, \tau; 0, \Delta t) d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(0-1)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} d\tau \tag{4.14}
\end{aligned}$$

ここで $t = \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}}$ とおく.

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{1}{2} \left\{ 4(\Delta t - \tau) \right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot -4 \cdot d\tau \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \cdot \frac{1}{4(\Delta t - \tau)} d\tau \\ d\tau &= \frac{1}{2} \sqrt{4(\Delta t - \tau)} \cdot 4(\Delta t - \tau) \cdot dt \end{aligned}$$

すると式(4.14) はつぎのように計算される.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp \left\{ -\frac{1}{4(\Delta t - \tau)} \right\} d\tau \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4(\Delta t - \tau)} \cdot 4(\Delta t - \tau) \cdot e^{-t^2} dt \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot 4(\Delta t - \tau) \cdot e^{-t^2} dt \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt \\ & \quad \text{note: } \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} e^{-t^2} \right]_x^{\infty} - \int_x^{\infty} 2 e^{-t^2} dt \\ & \quad \quad u = e^{-t^2} \quad \quad dv = \frac{1}{t^2} dt \\ & \quad \quad du = e^{-t^2} \cdot -2t dt \quad \quad v = -\frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{t} e^{-t^2} \right]_{\frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} 2 e^{-t^2} dt \\ & \quad \text{note: } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \text{erf}(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4\Delta t} \cdot \exp \left(-\frac{1}{4\Delta t} \right) - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{erf}(x) \right\} \end{aligned} \tag{4.15}$$

ただし, $x = \frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}$

4) $\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 0, t) d\tau$ の計算

式(4.15) を導いたときと同様に考えればよい.

$$\begin{aligned}
& \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 0, t) d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} V(0, \tau; 0, \Delta t) d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(0-0)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} d\tau \\
&= \left[\left\{ 4\pi(\Delta t - \tau) \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{-1}{4\pi} \right]_0^{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi\Delta t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4\Delta t} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

5) $\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 1, t) d\tau$ の計算

4) と同様に計算すればよい.

$$\begin{aligned}
& \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 1, t) d\tau \\
&= \int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; 1, \Delta t) d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(1-1)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} d\tau \\
&= \left[\left\{ 4\pi(\Delta t - \tau) \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{-1}{4\pi} \right]_0^{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi\Delta t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4\Delta t} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

6) $\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 1, t) d\tau$ の計算

$$\begin{aligned}
& \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; 1, t) d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} V(0, \tau; 1, \Delta t) d\tau \\
&= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(1-0)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} d\tau
\end{aligned}$$

これは, 3) の場合と同じであるから, 式(4.15) が使えて

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4\Delta t} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4\Delta t}\right) - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(x) \right\} \quad (4.18)$$

ただし, $x = \frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}$

となる.

7) $\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, t) d\tau$ の計算

$$V(\xi, \tau; x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\} \cdot -\frac{2(x-\xi)}{4(t-\tau)} \cdot -1 \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, t) d\tau \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, \Delta t) d\tau \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(0-1)^2}{4(\Delta t-\tau)} \right\} \cdot -\frac{2(0-1)}{4(\Delta t-\tau)} \cdot -1 \cdot d\tau \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t-\tau)}} \cdot \frac{-2}{4(\Delta t-\tau)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4(\Delta t-\tau)} \right\} d\tau \end{aligned}$$

ここで $t = \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t-\tau)}}$ とおく.

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{1}{2} \left\{ 4(\Delta t-\tau) \right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot -4 \cdot d\tau \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t-\tau)}} \cdot \frac{1}{4(\Delta t-\tau)} d\tau \\ d\tau &= \frac{1}{2} \sqrt{4(\Delta t-\tau)} \cdot 4(\Delta t-\tau) \cdot dt \end{aligned}$$

$$= -\int_{\frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$$

$$\text{note: } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \text{erf}(x)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \text{erf}(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{erf}(x) \right\} \quad (4.20)$$

$$\text{ただし, } x = \frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}$$

8) $\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, t) d\tau$ の計算

$$\begin{aligned}
 & \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, t) d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, \Delta t) d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(0-0)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} \cdot -\frac{2(0-0)}{4(\Delta t - \tau)} \cdot -1 \cdot d\tau \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

9) $\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, t) d\tau$ の計算

$$\begin{aligned}
 & \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, t) d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, \Delta t) d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(1-1)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} \cdot -\frac{2(1-1)}{4(\Delta t - \tau)} \cdot -1 \cdot d\tau \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

10) $\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, t) d\tau$ の計算

$$\begin{aligned}
 & \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, t) d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, \Delta t) d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(1-0)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} \cdot \frac{-2(1-0)}{4(\Delta t - \tau)} \cdot -1 \cdot d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \cdot \frac{2}{4(\Delta t - \tau)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{4(\Delta t - \tau)}\right\} d\tau
 \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \quad \text{とおく.}$$

$$dt = -\frac{1}{2} \left\{ 4(\Delta t - \tau) \right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot -4 \cdot d\tau$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \cdot \frac{1}{4(\Delta t - \tau)} \cdot d\tau$$

$$d\tau = \frac{1}{2} \sqrt{4(\Delta t - \tau)} \cdot 4(\Delta t - \tau) \cdot dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\
&\quad \text{note: } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \text{erf}(x) \\
&\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \text{erf}(x) \\
&= \frac{1}{2} \{1 - \text{erf}(x)\} \tag{4.23} \\
&\quad \text{ただし, } x = \frac{1}{\sqrt{4\Delta t}}
\end{aligned}$$

4.2.2 $0 < x < 1$ における積分項の計算

1) $\int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi$ の計算

$x=0 \sim 1$ 間を N 分割したとし, 座標を $l_0 (=0), l_1, \dots, l_N (=1)$ とする. すると,

$$\int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi = \sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi$$

となる. $u(\xi, t-\Delta t)$ は Δt 時間前の ξ における温度であるが, l_{i-1} と l_i の中間点の値で代表させることにすれば, $u(\xi, t-\Delta t)$ を積分の外に出せるので,

$$\int_{l_{i-1}}^{l_i} V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi \text{ が計算できればよいことになる.}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{l_{i-1}}^{l_i} V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi \\
&= \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Delta t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4\Delta t}\right\} d\xi
\end{aligned}$$

$$\text{ここで } t = \frac{x-\xi}{\sqrt{4\Delta t}} \text{ とおくと } dt = \frac{-1}{\sqrt{4\Delta t}} d\xi$$

$$= \int_{\frac{x-l_i}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\frac{x-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}} -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \tag{4.24}$$

($x < l_{i-1}$ のとき)

$$t = -\sigma \quad \text{とおくと} \quad dt = -d\sigma$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{l_{i-1}-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\frac{l_i-x}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2} d\sigma \\ &= \int_0^{\frac{l_i-x}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt - \int_0^{\frac{l_{i-1}-x}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{l_i-x}{\sqrt{4\Delta t}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{l_{i-1}-x}{\sqrt{4\Delta t}} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

($l_{i-1} < x < l_i$ のとき)

式(4.24)において $t = -\sigma$ とおくと $dt = -d\sigma$ となる. すると, 式(4.24)は

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{l_{i-1}-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\frac{l_i-x}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2} d\sigma \\ &= \int_{\frac{l_{i-1}-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{l_i-x}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{x-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{l_i-x}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{l_i-x}{\sqrt{4\Delta t}} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

($l_i < x$ のとき) 式(4.24)より

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{x-l_i}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\frac{x-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{x-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt - \int_0^{\frac{x-l_i}{\sqrt{4\Delta t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x-l_i}{\sqrt{4\Delta t}} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \text{note: } y &= \int_a^b -f(x) dx = - \left[F(x) \right]_a^b = -F(b) + F(a) \\ &= \int_b^a f(x) dx \quad \left(\frac{dF}{dx} = f \right) \end{aligned}$$

2) $\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; x, t) d\tau$ の計算

$$\int_{t-\Delta t}^t V(1, \tau; x, t) d\tau = \int_0^{\Delta t} V(1, \tau; x, \Delta t) d\tau \quad (\text{式 (4.13) 参照})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta t} V(1, \tau; x, \Delta t) d\tau \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} d\tau \\ & \quad t = \frac{(x-1)}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \quad \text{とおく,} \quad t^2 = \frac{(x-1)^2}{4(\Delta t - \tau)} \\ & \quad d\tau = (x-1) \cdot -\frac{1}{2} \left\{4(\Delta t - \tau)\right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot -4 \cdot d\tau \\ & \quad = (x-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \cdot \frac{1}{4(\Delta t - \tau)} \cdot d\tau \\ & \quad d\tau = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4(\Delta t - \tau)} \cdot 4(\Delta t - \tau) \cdot dt \\ &= \int_{\frac{x-1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{-\infty} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot 4(\Delta t - \tau) \cdot e^{-t^2} dt \\ &= \int_{\frac{x-1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{-\infty} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(x-1)^2}{t^2} \cdot e^{-t^2} dt \\ &= \int_{\frac{x-1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{-\infty} \frac{x-1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{-t^2} dt \\ &= \int_{\frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{-\infty} \frac{x-1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{-t^2} dt \\ & \quad T = -t \quad \text{とおく,} \quad dT = -dt \\ &= \int_{\frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{x-1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot e^{-T^2} \cdot -dT \\ & \quad T \rightarrow t \quad \text{にして書きかえると,} \\ &= \int_{\frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1-x}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1-x}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1-x}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{t} e^{-t^2} \right]_{\frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} - \frac{1-x}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} 2e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{note : } u = e^{-t^2} & dv = \frac{1}{t^2} dt \\
& du = e^{-t^2} \cdot -2t \cdot dt & v = -\frac{1}{t} \\
& = \frac{1-x}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{4\Delta t}}{1-x} \exp \left\{ -\frac{(1-x)^2}{4\Delta t} \right\} \right] - \frac{1-x}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X) \right\} \\
& = \frac{\sqrt{4\Delta t}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{(1-x)^2}{4\Delta t} \right\} - \frac{1-x}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X) \right\} \\
& \text{ただし, } X = \frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

3) $\int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; x, t) d\tau$ の計算

2) の場合と同様に計算を進めればよい.

$$\begin{aligned}
& \int_{t-\Delta t}^t V(0, \tau; x, t) d\tau = \int_0^{\Delta t} V(0, \tau; x, \Delta t) d\tau \\
& \int_0^{\Delta t} V(0, \tau; x, \Delta t) d\tau \\
& = \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-0)^2}{4(\Delta t - \tau)} \right\} d\tau \\
& \quad t = \frac{x}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \quad \text{とおく,} \quad t^2 = \frac{x^2}{4(\Delta t - \tau)} \\
& \quad dt = x \cdot -\frac{1}{2} \left\{ 4(\Delta t - \tau) \right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot -4 \cdot d\tau \\
& \quad = x \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \cdot \frac{1}{4(\Delta t - \tau)} \cdot d\tau \\
& \quad d\tau = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4(\Delta t - \tau)} \cdot 4(\Delta t - \tau) \cdot dt \\
& = \int_{\frac{x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot 4(\Delta t - \tau) \cdot e^{-t^2} dt \\
& = \int_{\frac{x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{-t^2} dt \\
& = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{t} e^{-t^2} \right]_{\frac{x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} - \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} 2e^{-t^2} dt \\
& = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{4\Delta t}}{x} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\Delta t} \right\} \right] - \frac{x}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X) \right\} \\
& = \frac{\sqrt{4\Delta t}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{x^2}{4\Delta t} \right) - \frac{x}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X) \right\} \\
& \text{ただし, } X = \frac{x}{\sqrt{4\Delta t}}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

4) $\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau$ の計算

$$V(\xi, \tau; x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\} \cdot \frac{-2(x-\xi)}{4(t-\tau)} \cdot -1$$

$$\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, t) d\tau = \int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, \Delta t) d\tau$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, \Delta t) d\tau \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-1)^2}{4(\Delta t-\tau)} \right\} \cdot \frac{-2(x-1)}{4(\Delta t-\tau)} \cdot -1 \cdot d\tau \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t-\tau)}} \cdot \frac{2(x-1)}{4(\Delta t-\tau)} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-1)^2}{4(\Delta t-\tau)} \right\} d\tau \end{aligned}$$

$$t = \frac{x-1}{\sqrt{4(\Delta t-\tau)}} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} dt &= (x-1) \cdot -\frac{1}{2} \left\{ 4(\Delta t-\tau) \right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot -4 \cdot d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t-\tau)}} \cdot \frac{2(x-1)}{4(\Delta t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

$$d\tau = \sqrt{4(\Delta t-\tau)} \cdot \frac{4(\Delta t-\tau)}{2(x-1)} dt$$

$$= \int_{\frac{x-1}{\sqrt{4\Delta t}}}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$$

$$T = -t \quad \text{とおく,} \quad dT = -dt$$

$$= \int_{\frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-T^2} dT$$

$$= \int_{\frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X) \right\} \quad (4.31)$$

$$\text{ただし, } X = \frac{1-x}{\sqrt{4\Delta t}}$$

$$\text{note: } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \operatorname{erf}(x)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

5) $\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau$ の計算

$$\begin{aligned}
 \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, t) d\tau &= \int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, \Delta t) d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, \Delta t) d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{(x-0)^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} \cdot \frac{-2(x-0)}{4(\Delta t - \tau)} \cdot -1 \cdot d\tau \\
 &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta t - \tau)}} \cdot \frac{2x}{4(\Delta t - \tau)} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{4(\Delta t - \tau)}\right\} d\tau \\
 &\quad t = \frac{x}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \quad \text{とおく} \\
 &\quad dt = x \cdot -\frac{1}{2} \left\{4(\Delta t - \tau)\right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot -4 \cdot d\tau \\
 &\quad = 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{4(\Delta t - \tau)}} \cdot \frac{1}{4(\Delta t - \tau)} d\tau \\
 &\quad d\tau = \sqrt{4(\Delta t - \tau)} \cdot \frac{4(\Delta t - \tau)}{2x} dt \\
 &= \int_{\frac{x}{\sqrt{4\Delta t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left\{1 - \operatorname{erf}(X)\right\} \tag{4.32} \\
 &\quad \text{ただし, } X = \frac{x}{\sqrt{4\Delta t}}
 \end{aligned}$$

4.2.3 積分計算のまとめ

1) $x=0$ のとき

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \\
 &= \sum_{i=1}^N u(\xi, t-\Delta t) \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{l_i}{\sqrt{4\Delta t}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}\right) \right\} \tag{4.33} \\
 &\quad \text{ただし, } l_{i-1} = \frac{1}{N}(i-1), \quad l_i = \frac{1}{N}i, \quad i=1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\Delta t} V(0, \tau; 0, \Delta t) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4\Delta t} \tag{4.34}$$

$$\int_0^{\Delta t} V(1, \tau; 0, \Delta t) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4\Delta t} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4\Delta t}\right) - \frac{1}{2} \{1 - \operatorname{erf}(x)\} \quad (4.35)$$

ただし, $x = 1/\sqrt{4\Delta t}$ 以下同じ

$$\int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 0, \Delta t) d\tau = 0 \quad (4.36)$$

$$\int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 0, \Delta t) d\tau = -\frac{1}{2} \{1 - \operatorname{erf}(x)\} \quad (4.37)$$

2) $x=1$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; 0, t) d\xi \\ &= \sum_{i=1}^N u(\xi, t-\Delta t) \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1-l_{i-1}}{\sqrt{4\Delta t}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1-l_i}{\sqrt{4\Delta t}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\int_0^{\Delta t} V(0, \tau; 1, \Delta t) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4\Delta t} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4\Delta t}\right) - \frac{1}{2} \{1 - \operatorname{erf}(x)\} \quad (4.39)$$

$$\int_0^{\Delta t} V(1, \tau; 1, \Delta t) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{4\Delta t} \quad (4.40)$$

$$\int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; 1, \Delta t) d\tau = \frac{1}{2} \{1 - \operatorname{erf}(x)\} \quad (4.41)$$

$$\int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; 1, \Delta t) d\tau = 0 \quad (4.42)$$

3) $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} u(\xi, t-\Delta t) V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi \quad (\text{注1}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

(注1) $u(\xi, t-\Delta t)$ は $l_{i-1} \leq \xi \leq l_i$ の領域においては, 一定値で代表させるとすれば,
 $u(\xi, t-\Delta t)$ は積分の外に出せる. また, $u(\xi, t-\Delta t)$ は Δt 時間前の温度である.

$$I = \int_{l_{i-1}}^{l_i} V(\xi, t-\Delta t; x, t) d\xi \quad \text{とおく} \quad (4.44)$$

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{l_i - x}{\sqrt{4 \Delta t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{l_{i-1} - x}{\sqrt{4 \Delta t}} \right) \right\} \quad (x < l_{i-1}) \quad (4.45)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x - l_{i-1}}{\sqrt{4 \Delta t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{l_i - x}{\sqrt{4 \Delta t}} \right) \right\} \quad (l_{i-1} < x < l_i) \quad (4.46)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x - l_{i-1}}{\sqrt{4 \Delta t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x - l_i}{\sqrt{4 \Delta t}} \right) \right\} \quad (l_i < x) \quad (4.47)$$

$$\int_0^{\Delta t} V(0, \tau; x, \Delta t) d\tau = \frac{\sqrt{4 \Delta t}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{4 \Delta t} \right) - \frac{x}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X_1) \right\} \quad (4.48)$$

ただし, $X_1 = x / \sqrt{4 \Delta t}$ 以下同じ

$$\int_0^{\Delta t} V(1, \tau; x, \Delta t) d\tau = \frac{\sqrt{4 \Delta t}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{(1-x)^2}{4 \Delta t} \right\} - \frac{1-x}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X_2) \right\} \quad (4.49)$$

ただし, $X_2 = (1-x) / \sqrt{4 \Delta t}$ 以下同じ

$$\int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(0, \tau; x, \Delta t) d\tau = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X_1) \right\} \quad (4.50)$$

$$\int_0^{\Delta t} \frac{\partial V}{\partial \xi}(1, \tau; x, \Delta t) d\tau = -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(X_2) \right\} \quad (4.51)$$

4.3 誤差関数の数値計算

4.3.1 誤差関数 (Error function)

ここでは, 4.2 に出てくる誤差関数の計算法を考えてみる⁵⁾.

誤差関数はつぎのように定義されている.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1 - 2\Phi(-\sqrt{2} x) \quad (4.52)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 2\Phi(-\sqrt{2} x) \quad (4.53)$$

ただし, Φ はつぎのように表される.

$$\Phi(-x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} \quad (0 \leq x \leq 3) \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{x^{2n}} \quad (3 \leq x) \quad (4.55)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$$

$$= x - \frac{x^3}{2 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^2 \cdot (2 \cdot 1) \cdot 5} - \frac{x^7}{2^3 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 7} + \frac{x^9}{2^4 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 9} - \dots \quad (4.56)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{x^{2n}}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3 \cdot 1}{x^4} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{x^6} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{x^8} - \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{x^{10}} + \dots \quad (4.57)$$

4.3.2 計算停止条件

式(4.54), (4.55)の第 n 項の絶対値が 10^{-12} より小さくなったとき, 計算を停止する.

$$|t_n| = \frac{x^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} < 10^{-12} \quad (\text{式(4.54)に適用})$$

$$|t_n| = \frac{(2n-1)!!}{x^{2n}} < 10^{-12} \quad (\text{式(4.55)に適用})$$

5. 結果および考察

5.1 境界要素法による数値解の計算

いま, レトルト食品は厚みが薄いので, 熱の伝わり方は1次元熱伝導が当てはまるとする. レトルト殺菌中のレトルト食品の表面温度は加熱中はレトルト温度に, 冷却中は冷却水温度になるとして, 厚み方向の温度について考える. ただし, カムアップタイムとカムダウタイムは0とする.

1) 加熱領域 ($0 \leq t \leq t_h$)

$$\partial u / \partial t = \alpha (\partial^2 u / \partial x^2) \quad (5.1)$$

$$u = T_R \quad \text{at } x=0 \quad (5.2)$$

$$u = T_R \quad \text{at } x=a \quad (5.3)$$

$$u_0 = T_0 \quad \text{when } t=0 \quad (5.4)$$

2) 冷却領域 ($t_h \leq t$)

$$\partial u / \partial t = \alpha (\partial^2 u / \partial x^2) \quad (5.5)$$

$$u = T_C \quad \text{at } x=0 \quad (5.6)$$

$$u = T_C \quad \text{at } x=a \quad (5.7)$$

ただし, u = 温度
 α = 温度伝導率
 T_R = レトルト温度
 T_C = 冷却水温度

T_0 = 初期温度
 a = レトルト食品の厚み
 x = レトルト食品の厚み方向の座標
 t = 時間
 t_h = 加熱時間

つぎに、式(5.1)～(5.7)を無次元化する。 $U = u/u_0$, $X = x/a$, $T = \alpha t/a^2$ とおき、 $T_1 = T_R/T_0$, $T_2 = T_C/T_0$ とおけば、つぎの式が得られる。

3) 加熱領域 ($0 \leq T \leq T_h$)

$$\partial U / \partial T = \partial^2 U / \partial X^2 \quad (5.8)$$

$$U = T_1 \quad \text{at} \quad X = 0 \quad (5.9)$$

$$U = T_1 \quad \text{at} \quad X = 1 \quad (5.10)$$

$$U_0 = 1 \quad \text{when} \quad T = 0 \quad (5.11)$$

$$\text{ただし, } T_h = \alpha t_h / a^2$$

4) 冷却領域 ($T_h \leq T$)

$$\partial U / \partial T = \partial^2 U / \partial X^2 \quad (5.12)$$

$$U = T_2 \quad \text{at} \quad X = 0 \quad (5.13)$$

$$U = T_2 \quad \text{at} \quad X = 1 \quad (5.14)$$

5.2 理論解との比較

この式(5.8)～(5.14)に境界要素法をあてはめると無次元化された温度が計算できるが、真の温度は $u = U \times u_0$ となる。時間は無次元化された T を使うので、真の時間は $t = T a^2 / \alpha$ となる。実際の温度計算は、4.1に述べた手順通りに実行すればよい。付録2に筆者が作成したF-Basic言語による計算プログラムを示す。

ここで、レトルト食品のレトルト殺菌中の厚み方向の温度を境界要素法で計算した数値解と理論解(1次元非定常熱伝導方程式を理論的に解いて計算した解)とを比較してみることにする。

計算に用いた諸データはつぎの通りである。

温度伝導率 $\alpha = 9.6 \text{ [mm}^2/\text{min]}$

レトルト温度 $T_R = 120 \text{ [}^\circ\text{C]}$

冷却水温度 $T_C = 20 \text{ [}^\circ\text{C]}$

初期温度 $T_0 = 20 \text{ [}^\circ\text{C]}$

厚み $a = 10 \text{ [mm]}$

加熱時間 $t_h = 10 \text{ [min]}$

表1に境界要素法による数値解を、表2に理論解を示す。表1, 2より境界要素法による数値解は理論解とほとんど一致していることがわかる。

表1 境界要素法による数値解

BEM11 BOUNDARY ELEMENT METHOD

AM = 10.000 [mm]
 M = 100 [elements IN D]
 ALFA = 9.600 [mm²/min]
 TEM0 = 20.0 [°C]
 TEMR = 120.0 [°C]
 TEMC = 20.0 [°C]
 TH = 10.0 [min]
 TC = 5.0 [min]
 TPR = 1.0 [min]
 NTPR = 100 [TPR NO BUNKATSU]
 DELTT = 0.00096 [dimensionless time]
 N = 2 [boundary elements]

Time	x=0											x=a	平均
1.0	120.0	104.7	91.0	80.1	73.1	70.7	73.1	80.1	91.0	104.7	120.0	120.0	88.9
2.0	120.0	114.1	108.8	104.6	101.9	101.0	101.9	104.6	108.8	114.1	120.0	120.0	108.0
3.0	120.0	117.7	115.7	114.0	113.0	112.6	113.0	114.0	115.7	117.7	120.0	120.0	115.4
4.0	120.0	119.1	118.3	117.7	117.3	117.2	117.3	117.7	118.3	119.1	120.0	120.0	118.2
5.0	120.0	119.7	119.4	119.1	119.0	118.9	119.0	119.1	119.4	119.7	120.0	120.0	119.3
6.0	120.0	119.9	119.8	119.7	119.6	119.6	119.6	119.7	119.8	119.9	120.0	120.0	119.7
7.0	120.0	119.9	119.9	119.9	119.8	119.8	119.8	119.9	119.9	119.9	120.0	120.0	119.9
8.0	120.0	120.0	120.0	119.9	119.9	119.9	119.9	119.9	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0
9.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0
10.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0
11.0	20.0	35.3	49.0	59.9	66.9	69.3	66.9	59.9	49.0	35.3	20.0	20.0	51.1
12.0	20.0	25.9	31.2	35.4	38.1	39.0	38.1	35.4	31.2	25.9	20.0	20.0	32.0
13.0	20.0	22.3	24.3	26.0	27.0	27.4	27.0	26.0	24.3	22.3	20.0	20.0	24.6
14.0	20.0	20.9	21.7	22.3	22.7	22.8	22.7	22.3	21.7	20.9	20.0	20.0	21.8
15.0	20.0	20.3	20.6	20.9	21.0	21.1	21.0	20.9	20.6	20.3	20.0	20.0	20.7

表2 理論解

GRAD3 (SIN SERIES THEORETICAL SOLUTION-SLAB)

A = 10.0 [mm]
 ND = 10 [BUNKATSU]
 ALFA = 9.600 [mm²/min]
 TEM0 = 20.0 [°C]
 TEMR = 120.0 [°C]
 TEMC = 20.0 [°C]
 TH = 10.0 [min]
 TC = 5.0 [min]
 TPR = 1.0 [min]

Time	x=0											x=a	平均
1.0	120.0	104.7	91.0	80.1	73.1	70.6	73.1	80.1	91.0	104.7	120.0	120.0	88.8
2.0	120.0	114.1	108.7	104.5	101.8	100.9	101.8	104.5	108.7	114.1	120.0	120.0	107.9
3.0	120.0	117.7	115.6	114.0	112.9	112.6	112.9	114.0	115.6	117.7	120.0	120.0	115.3
4.0	120.0	119.1	118.3	117.7	117.3	117.1	117.3	117.7	118.3	119.1	120.0	120.0	118.2
5.0	120.0	119.7	119.3	119.1	118.9	118.9	118.9	119.1	119.3	119.7	120.0	120.0	119.3
6.0	120.0	119.9	119.7	119.7	119.6	119.6	119.6	119.7	119.7	119.9	120.0	120.0	119.7
7.0	120.0	119.9	119.9	119.9	119.8	119.8	119.8	119.9	119.9	119.9	120.0	120.0	119.9
8.0	120.0	120.0	120.0	119.9	119.9	119.9	119.9	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0
9.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0
10.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0	120.0
11.0	20.0	35.3	49.0	59.9	66.9	69.4	66.9	59.9	49.0	35.3	20.0	20.0	51.2
12.0	20.0	25.9	31.2	35.5	38.2	39.1	38.2	35.5	31.2	25.9	20.0	20.0	32.1
13.0	20.0	22.3	24.4	26.0	27.1	27.4	27.1	26.0	24.4	22.3	20.0	20.0	24.7
14.0	20.0	20.9	21.7	22.3	22.7	22.9	22.7	22.3	21.7	20.9	20.0	20.0	21.8
15.0	20.0	20.3	20.7	20.9	21.1	21.1	21.1	20.9	20.7	20.3	20.0	20.0	20.7

6. まとめ

境界要素法による1次元非定常熱伝導方程式の解法について考えてみた。境界要素法は電磁気学や材料力学などに応用されている場合が多いが、1次元熱伝導にも十分応用できることがわかった。有限要素法は重み関数として比較的簡単な内装関数を用いるが、境界要素法はグリーン関数を用いるところに大きな違いがある。そのために境界要素法を理解するには、有限要素法よりもやや高度な数学的知識が要求される。実際の計算においては、連立方程式の未知数の数は有限要素法の方が境界要素法よりもかなり多くなるので、有限要素法の方が計算に時間がかかることになる。したがって、問題によっては有限要素法は大型コンピュータ向きであり、境界要素法はパソコン向きであるといえよう。

ここでは、1次元非定常熱伝導方程式の境界要素法による数値解を求めるための計算方法を導いた。さらに、この方法を用いてレトルト殺菌中のレトルト食品の温度を計算し理論解と比較したが、境界要素法による数値解は理論解とほとんど一致した。

参 考 文 献

- 1) 水本久夫, 原平八郎: 境界要素法の基礎, サイエンス社, 2, 151~152 (1985)
- 2) 榎園正人: 境界要素解析, 培風館, 26 (1986)
- 3) 登坂宣弘, 大西和栄: 偏微分方程式の数値シミュレーション, 東京大学出版会, 71 (1993)
- 4) 野手悌士: 移動および速度論 (第4偏熱伝導論), 横浜国立大学, 178 (1961)
- 5) 森口繁一: 数値計算工学, 岩波書店, 261 (1989)

〔付録 1〕

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(\xi, t) V(\xi, t; x, t) d\xi &= \frac{1}{2} u(x, t) & (x=0, 1) \\ &= u(x, t) & (0 < x < 1)\end{aligned}$$

の証明.

 $x=1$ のときについて考える.いま十分小さい正数 ε をとったとすれば, つぎの式が証明されればよい.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 u(\xi, t) V(\xi, t; 1, t+\varepsilon) d\xi = \frac{1}{2} u(1, t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}& \int_0^1 u(\xi, t) V(\xi, t; 1, t+\varepsilon) d\xi \\ &= \int_0^1 u(\xi, t) \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \exp\left\{-\frac{(1-\xi)^2}{4\varepsilon}\right\} d\xi \\ & \quad \frac{1-\xi}{\sqrt{4\varepsilon}} = s \quad \text{とおくと} \quad -\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}} d\xi = ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}}^0 u(1-s\sqrt{4\varepsilon}, t) e^{-s^2} \cdot -ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}} u(1-s\sqrt{4\varepsilon}, t) e^{-s^2} ds \quad (2) \\ & \quad \text{note: } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \int_0^1 u(\xi, t) V(\xi, t; 1, t+\varepsilon) d\xi - \frac{1}{2} u(1, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}} u(1-s\sqrt{4\varepsilon}, t) e^{-s^2} ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u(1, t) e^{-s^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}} \{u(1-s\sqrt{4\varepsilon}, t) - u(1, t)\} e^{-s^2} ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}}^{\infty} u(1, t) e^{-s^2} ds \quad (3)\end{aligned}$$

ここで $u(\xi, t)$ は ξ の関数であり $0 \leq \xi \leq 1$ で連続である. よって ε を十分小さくとると, 式(3)の右辺の2つの積分はいくらでも小さくできるから, 式(1)は証明された.

$x=0$ のときも, $0 < x < 1$ のときも同様に証明できる.

〔付録 2〕

```

1:rem BEM11
2:rem BOUNDARY ELEMENT METHOD
3:rem ONE DIMENSIONAL HEAT TRANSFER EQUATION
4:rem BOUNDARY TEMPERATURES ARE GIVEN
5:rem REVERSED MATRIX IS CALCULATED BY TERAJIMA'S METHOD
6:rem FROM BEM53
7:rem HEATING AND COOLING
8:rem
9:rem BY TERAJIMA ON MARCH 29, 2002
10:rem
11:  dim G(2), U(200), UM(200), UDU(2), AMAT(2,2), GSE(2,2), VV(2,2), WW(2,2)
12:  dim FF(2,200), WORKN(2), VVP(200,2), WWP(200,2), FFP(200,200), WORKM(200)
13:  dim P(50)
14:rem
15:  gosub*INPUT
16:  gosub*CALVWFC
17:  gosub*CALVWFD
18:  gosub*MATRXA
19:  gosub*INVERS
20:rem
21:  NZ = NTPR
22:  for NT = 1 to NF
23:    TFO = DELTT*NT
24:    TIM = TFO*AM*AM/ALFA
25:rem
26:    if NT>NH goto 10
27:    G(1) = T1
28:    G(2) = T1
29:    goto 20
30:  10 G(1) = T2
31:    G(2) = T2
32:rem
33:  20 gosub*STEP1
34:    gosub*STEP2
35:rem
36:    if ( NT = NZ ) goto 777
37:    goto 700
38:  777 UI = G(1)*TEM0
39:    UF = G(2)*TEM0
40:    for IP = 1 to M - 1
41:      UM(IP) = (U(IP) + U(IP + 1))/2*TEM0
42:    next IP
43:rem
44:    NP = M/10
45:    SUM = 0
46:    for IP = NP to M - 1 step NP
47:      SUM = SUM + UM(IP)
48:    next IP
49:    TMM = (SUM + 0.5*(UI + UF))/10
50:rem

```

```

51:  NJ = M/10
52:  P(1) = TIM
53:  P(2) = UI
54:  P(12) = UF
55:  P(13) = TMM
56:rem
57:  for J = 3 to 11
58:    K = NJ + NJ*(J - 3)
59:    P(J) = UM(K)
60:  next J
61:  for JJ = 1 to 13
62:    print using "####.#";P(JJ);
63:  next JJ
64:  print
65:  NZ = NZ + NTPR
66: 700 next NP
67:  stop
68:  end
69:rem
70:rem
71:  *INPUT
72:  read AM,M,ALFA,TEM0,TEMR,TEMC,TH,TC,TPR,NTPR
73:  data 10.0,100
74:  data 9.600
75:  data 20,120,20
76:  data 10,5,1,100
77:rem
78:  N = 2
79:  DELTT = ALFA/AM/AM*TPR/NTPR
80:rem
81:  NNF = (TH + TC)/TPR
82:  NF = NNF*NTPR
83:  NNH = TH/TPR
84:  NH = NNH*NTPR
85:  NZ = NTPR
86:rem
87:  T1 = TEMR/TEM0
88:  T2 = TEMC/TEM0
89:rem
90:  for K = 1 to M
91:    U(K) = 1
92:  next K
93:rem
94:  print " BEM11 BOUNDARY ELEMENT METHOD"
95:  print using" AM =####.###[mm] ";AM
96:  print using" M =#####[ELEMENTS IN D] ";M
97:  print using" ALFA =####.###[mm2/min] ";ALFA
98:  print using" TEM0 =#####.[°C] ";TEM0
99:  print using" TEMR =#####.[°C] ";TEMR
100: print using" TEMC =#####.[°C] ";TEMC
101: print using" TH =#####.[MIN] ";TH
102: print using" TC =#####.[MIN] ";TC

```

```

103:  print using"  TPR  =#####.[MIN]          ";TPR
104:  print using"  NTPR =#####[TPR NO BUNKATSU]  ";NTPR
105:  print using"  DELTT =#.#####[DIMENSIONLESS TIME]";DELTT
106:  print using"  N  =#####[BOUNDARY ELEMENTS]  ";N
107:  print
108:  return
109:rem
110:rem
111:  *CALVWFC
112:  PI = 3.14159265358
113:rem
114:  X = 1/sqr(4*DELTT)
115:  gosub*ERFX
116:  Y = EFX
117:  V1 = 0.5/sqr(PI)*sqr(4*DELTT)
118:  V2 = 0.5/sqr(PI)*sqr(4*DELTT)*exp(-1/4/DELTT)
119:  VV(1,1) = V1
120:  VV(1,2) = V2 - 0.5*(1 - Y)
121:  VV(2,1) = V2 - 0.5*(1 - Y)
122:  VV(2,2) = V1
123:  WW(1,1) = 0
124:  WW(1,2) = 0.5*(1 - Y)
125:  WW(2,1) = 0.5*(1 - Y)
126:  WW(2,2) = 0
127:rem
128:  for K = 1 to M
129:  X1 = 1/M*(K - 1)
130:  X2 = 1/M*K
131:rem
132:  X = X1/sqr(4*DELTT)
133:  gosub*ERFX
134:  Y1 = EFX
135:  X = X2/sqr(4*DELTT)
136:  gosub*ERFX
137:  Y2 = EFX
138:  FF(1,K) = 0.5*(Y2 - Y1)
139:rem
140:  X = X(1 - X1)/sqr(4*DELTT)
141:  gosub*ERFX
142:  Y1 = EFX
143:  X = X(1 - X2)/sqr(4*DELTT)
144:  gosub*ERFX
145:  Y2 = EFX
146:  FF(2,K) = 0.5*(Y1 - Y2)
147:  next K
148:  return
149:rem
150:rem
151:  *CALVWFD
152:  PI = 3.14159265359
153:  for K = 1 to M
154:  X1 = 1/M*(K - 1)

```

```

155:  X2 = 1/M*K
156:  XM = (X1 + X2)/2
157:  X = XM/sqr(4*DELTT)
158:  gosub*ERFX
159:  Y = EFX
160:  V1 = 0.5/sqr(PI)*sqr(4*DELTT)*exp(-XM*XM/4/DELTT)
161:  VVP(K,1) = V1 - 0.5*XM*(1 - Y)
162:  WWP(K,1) = 0.5*(1 - Y)
163:rem
164:  XN = 1 - XM
165:  X = (1 - XM)/sqr(4*DELTT)
166:  gosub*ERFX
167:  Y = EFX
168:  V2 = 0.5/sqr(PI)*sqr(4*DELTT)*exp(-XN*XN/4/DELTT)
169:  VVP(K,2) = V2 - 0.5*XN*(1 - Y)
170:  WWP(K,2) = -0.5*(1 - Y)
171:  next K
172:rem
173:  for IP = 1 to M
174:  XP1 = 1/M*(IP - 1)
175:  XP2 = 1/M*IP
176:  XP = (XP1 + XP2)/2
177:  for K = 1 to M
178:  X1 = 1/M*(K - 1)
179:  X2 = 1/M*K
180:  if ( XP < X1 ) goto 3100
181:  if ( XP < X2 ) goto 3200
182:  X = (XP - X1)/sqr(4*DELTT)
183:  gosub*ERFX
184:  Y1 = EFX
185:  X = (XP - X2)/sqr(4*DELTT)
186:  gosub*ERFX
187:  Y2 = EFX
188:  UF = 0.5*(Y1 - Y2)
189:  goto 3300
190:3100 X = (X1 - XP)/sqr(4*DELTT)
191:  gosub*ERFX
192:  Y1 = EFX
193:  X = (X2 - XP)/sqr(4*DELTT)
194:  gosub*ERFX
195:  Y2 = EFX
196:  UF = 0.5*(Y2 - Y1)
197:  goto 3300
198:3200 X = (XP - X1)/sqr(4*DELTT)
199:  gosub*ERFX
200:  Y1 = EFX
201:  X = (X2 - XP)/sqr(4*DELTT)
202:  gosub*ERFX
203:  Y2 = EFX
204:  UF = 0.5*(Y1 + Y2)
205:3300 FFP(IP,K) = UF
206:  next K

```



```

207:  next IP
208:  return
209:rem
210:rem
211:  *ERFX
212:300 XX = X*sqr(2.0)
213:  if ( X > 3 ) goto 200
214:  goub*CAL1
215:  goto 400
216:200 goub*CAL2
217:400 EFX = 1 - 2*Y#
218:  return
219:rem
220:rem
221:  *CAL1
222:  PI = 3.14159265359
223:  A# = XX
224:  TMAX = 0
225:  SUM# = XX
226:  SG = 1
227:rem
228:  for N = 1 to 100
229:  A# = A#*SG*(-1)*XX*XX/2/N
230:  B# = A#/(2*N+1)
231:  SU# = SU#*B#
232:  SUM# = SUM# + B#
233:  if ( abs(B#) < TMAX ) goto 2000
234:  TMAX = abs(B#)
235:2000 if ( abs(B#) < 1.0E-12 ) goto 3000
236:  next N
237:3000 Y# = 0.5 - 1/sqr(2*PI)*SUM#
238:  return
239:rem
240:rem
241:  *CAL2
242:  PI = 3.14159265359
243:  A# = 1
244:  SUM# = 1
245:rem
246:  SG = 1
247:  for N = 1 to 100
248:  A# = A#*SG*(-1)*(2*N-1)/XX/XX
249:  SUM# = SUM# + A#
250:  if ( N <= 4 ) goto 4000
251:  TMIN = abs(A#)
252:  if ( abs(A#) > TMIN ) goto 5000
253:  TMIN = abs(A#)
254:4000 next N
255:5000 Y# = 1/sqr(2*PI)*exp(-XX*XX/2)/XX*SUM#
256:  return
257:rem
258:rem

```



```

259:  *MATRXA
260:  AMAT(1,1) = -VV(1,1)
261:  AMAT(1,2) = VV(1,2)
262:  AMAT(2,1) = -VV(2,1)
263:  AMAT(2,2) = VV(2,2)
264:  return
265:rem
266:rem
267:  *INVERS
268:  N = 2
269:  for I = 1 to N
270:    for J = 1 to N
271:      if ( I = J ) goto 52
272:      GSE(I,J) = 0
273:      goto 51
274:  52 GSE(I,J) = 1
275:  51 next J
276:  next I
277:rem
278:  for I = 1 to N
279:    PV = 1/AMAT(I,I)
280:    for J = 1 to N
281:      AMAT(I, J) = AMAT(I,J)*PV
282:      GSE(I,J) = GSE(I,J)*PV
283:    next J
284:rem
285:  for K = 1 to N
286:    if ( K = I ) goto 62
287:    W = AMAT(K,I)
288:    for J = 1 to N
289:      AMAT(K,J) = AMAT(K,J) - W*AMAT(I, J)
290:      GSE(K,J) = GSE(K,J) - W*GSE(I,J)
291:    next J
292:  62 next K
293:  nex I
294:rem
295:rem
296:  *STEP1
297:  N = 2
298:  for I = 1 to N
299:    WORKN(I) = 0
300:    for K = 1 to M
301:      WORKN(I) = WORKNN(I) - FF(I,K)*U(K)
302:    next K
303:  next I
304:rem
305:  WORKN(1) = WORKN(1) + WW(1,2)*G(2) + 0.5*G(1)
306:  WORKN(2) = WORKN(2) - WW(2,1)*G(1) + 0.5*G(2)
307:rem
308:  for = 1 to N
309:    SU = 0
310:    for J = 1 to N

```

```

311:  SU = SU + GSE(I,J)*WORKN(J)
312:  next J
313:  UDU(I) = SU
314:  next I
315:  return
316:rem
317:rem
318:  *STEP2
319:  for K = 1 to M
320:    WORKN(K) = U(K)
321:  next K
322:rem
323:  for IP = 1 to M
324:    U(IP) = 0
325:    for K = 1 to M
326:      U(IP) = U(IP) + FFP(IP, K)*WORKM(K)
327:    next K
328:    U(IP) = U(IP) - WWP(IP, 2)*G(2) + WWP(IP, 1)*G(1) + VVP(IP, 2)*UDU(2) - VVP(IP, 1)*UDU(1)
329:  next IP
330:  return

```