

向井の ATS 法と Ball の数式法におけるパラメータの関係

田辺 利裕*

Relationship of the constants of the Ball's "Heat Transfer Equation" and the Mukai's "Ambient Temperature Slide Method"

Toshihiro Tanabe*

The Ball's "Heat Transfer Equation" and the Mukai's "Ambient Temperature Slide Method" formulas were verified using the "Newton's Law of Cooling" formula. The relationship between the two constants of the Ball's "Heat Transfer Equation" (f, j) and the two constants of the Mukai's "Ambient Temperature Slide Method" (τ, δ) were recognized as follows.

$$\tau \approx 2.3026 \frac{\Delta t}{f}, \delta = f \log j \quad (\Delta t \text{ is very short time.})$$

今日では、特に飲料分野で熱交換機を利用した無菌充填技術が進歩してきている。これは、主に高温短時間殺菌が適用されるため、結果的に品質が従来のレトルト殺菌製品を上回ることになり、昨今では、「無菌充填＝品質が良い」、「レトルト殺菌＝品質が悪い」というイメージまで定着している。しかしこれは誤解であり、本来は「高温短時間殺菌＝品質が良い」、「低温長時間殺菌＝品質が悪い」のはずである。これは、レトルト分野で品質面、すなわち調理値を考慮した殺菌技術の検討が十分ではなかったためと思われる。

そのため、必要な殺菌値を確保しつつ、いかに低い調理値で仕上げるかという熱伝達シミュレーションによる殺菌プログラムの最適化の検討が今日では重要となっており、これを実務的に簡単に利用するためのツールが必要である。

レトルト殺菌の殺菌値を理論計算する手法として、Ballらが提唱した数式法¹⁾ (以下 Ball 法と略す) が古くから利用されている。また、これを発展させ、より正確な計算を行った Hayakawa の研究^{2,3)} (以下 Hayakawa 法と略す) や、最近では伝熱方程式を利用してパソコンで熱流を解析するソフトも販売されているが、Ball 法以外は、実務的に容易に使いこなせるものとは言い難い。

2006 年に発表された向井による ATS 法⁴⁻⁷⁾ は、経過時間ごとの品温をパソコンによる計算で求める手法をとっている。そのため、測定点の殺菌値だけでなくその調理値を求めることも容易である。もともと表計算ソフトによるパソコン計算が前提となっているため、各種温度測定機による電子データとの親和性があり、使いこなしが非常に容易である。これらのことから、ATS 法が実務的なツールとなりうると考えた。しかし、向井の理論は、まだ一般には

受け入れられていない状況にある。また、ATS 法では伝熱挙動を示すために、Ball 法で求められている 2 つのパラメータ (f, j) とは異なる独自の 2 つのパラメータ (τ, δ) を使用しているため、ATS 法で熱伝達シミュレーションを行うためには、現状では過去の知見が生かせず、パラメータを取り直さねばならない。

本報では、Ball 法、Hayakawa 法、ATS 法のどれが優れているか否かということではなく、いずれも同じ熱伝達挙動を議論するためのものであるのであれば、一つの理論を利用すればどれも同じように説明できるはずとの発想に基づき、ここでは Ball 法および ATS 法の基本式をニュートンの冷却法則を利用して検証し、両者の関連・相違を明らかにし、Ball 法のパラメータ (f, j) と ATS 法のパラメータ (τ, δ) の相互変換を試みた。

1. ニュートンの冷却法則と Ball 法と実際の熱伝達

温度差がある場での熱伝達を表すのに、ここでは伝導型でも対流型でも使えるニュートンの冷却法則を利用する。これは、『物体の冷却 (熱伝達) 速度は品温と雰囲気温度 (一定) との差に比例する』という実験法則で、一般的には下式のような微分方程式として記されている。

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - RT) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$T(t)$: 品温, t : 時間・時刻, RT : 雰囲気温度 (一定), k : 比例定数 (>0) (品温 $T(t)$ は、時刻 t の関数である.)

(1) 式は、冷却時の状況を表すため、品温 $T(t)$ の方が雰囲気温度 RT よりも高く、また温度が下がるという向きを表すため比例定数 k の前に負の符号をつけ、このよう

*: 現在, Toyo Seikan Technical & Administration Service Center (Asia) Co., Ltd.

注: 本論文は缶詰時報, Vol.89, No.6, 551-557 (2010) 掲載論文を転載したものである。

な表記となる.

加熱時の状況を表記するためには, (1) 式を変形した以下の表記となる.

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(RT - T(t)) \quad \dots\dots\dots (1')$$

(1') 式について, 雰囲気温度 RT が一定であるので, 変数分離が可能である. そこで, (1') 式を変数分離後, 両辺を積分する.

$$\int \frac{1}{RT - T(t)} dT(t) = \int k dt \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore -\ln(RT - T(t)) = kt + C \quad (C: \text{積分定数}) \quad \dots\dots (3)$$

初期条件である $t = 0$ のときの温度 (初期温度) を IT とすると,

$$-\ln(RT - IT) = C \quad \dots\dots\dots (4)$$

(3), (4) より,

$$-\ln(RT - T(t)) = kt - \ln(RT - IT) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\therefore \ln\left(\frac{RT - T(t)}{RT - IT}\right) = -kt \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで, $u = \frac{RT - T(t)}{RT - IT}$ とおくと,

$$\ln u = -kt \quad \dots\dots\dots (7)$$

常用対数に変換して,

$$\log u = -(\log e)kt \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで, $f = \frac{1}{(\log e)k}$ とおけば,

$$\log u = -\frac{t}{f} \quad \dots\dots\dots (9)$$

この (9) 式は, 遅れ係数 j の項がないだけで, 基本的には後述の Ball らの熱伝達曲線の式 (10) と同型である.

実際のレトルト殺菌における熱伝達曲線は, 周知のように製品に熱を加えてすぐに温度変化が熱伝達曲線の直線部分と合致するのではなく, 多少のタイムラグをもってから直線部分と合致する挙動を示す. その例として, 表 1 に, $130 \times 170 \text{ mm}$ の平パウチ (200 g 詰: 15 mm 厚) での温度実測値 (シャワー式殺菌: CUT=10 分) を, 図 1 にその熱伝達曲線を示した. ニュートンの冷却法則の式を変形したのみである (9) 式では, 実際の熱伝達の挙動を再現できない. Ball らの熱伝達曲線の式は, (9) 式を縦軸方向にスライドさせた以下の式となっている.

$$\log u = -\frac{t}{f} + \log j \quad (j: \text{遅れ係数}) \quad \dots\dots\dots (10)$$

このように, Ball らの熱伝達曲線の式は, ニュートンの冷却法則を実際の熱伝達挙動に合うように書き換えた実験法則であったと考えられる.

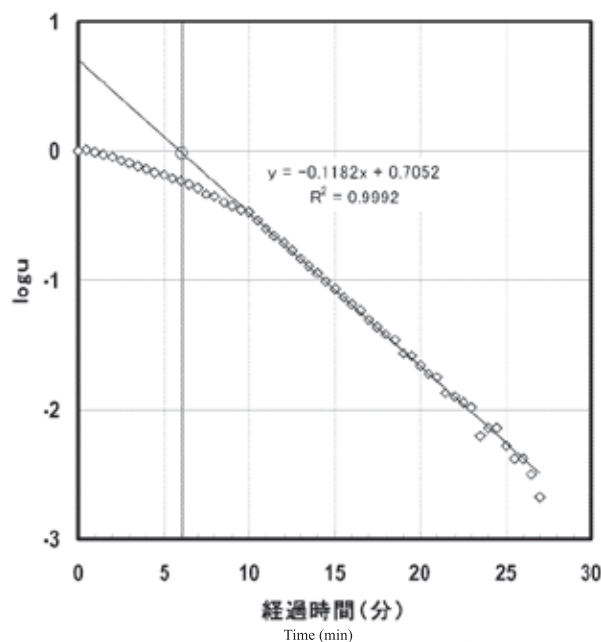


図 1 温度実測例に基づく熱伝達曲線

Fig. 1 The heat transfer curve of based on the example of measuring temperature

表1 130 × 170 mm 平パウチ (200 g 詰) でのシャワー式殺菌温度実測例
 Table 1 Example of measuring temperature of the pouch sample (130 × 170 mm, 200 g)

時間 time (min)	品温 sample temperature (℃)	槽温 retort temperature (℃)	時間 (min)	品温 (℃)	槽温 (℃)	時間 (min)	品温 (℃)	槽温 (℃)
0.0	25.1	23.4	15.0	112.7	120.9	30.0	116.4	101.9
0.5	25.0	30.3	15.5	113.8	120.9	30.5	114.8	97.1
1.0	25.4	36.3	16.0	114.6	120.9	31.0	113.0	97.3
1.5	26.2	41.4	16.5	115.4	121.0	31.5	111.1	92.9
2.0	27.5	46.9	17.0	116.1	120.8	32.0	109.2	88.1
2.5	29.3	52.9	17.5	116.7	120.9	32.5	106.9	83.5
3.0	31.6	58.8	18.0	117.3	121.0	33.0	104.5	78.2
3.5	34.4	64.6	18.5	117.7	121.0	33.5	101.7	72.9
4.0	37.5	70.3	19.0	118.2	120.8	34.0	98.6	67.8
4.5	41.1	76.3	19.5	118.5	121.0	34.5	95.3	59.4
5.0	45.0	81.9	20.0	118.8	120.9	35.0	91.6	54.7
5.5	49.1	87.5	20.5	119.1	120.9	35.5	87.7	49.5
6.0	53.6	93.1	21.0	119.3	121.0	36.0	83.6	43.4
6.5	58.2	98.6	21.5	119.6	120.9	36.5	79.5	38.6
7.0	63.0	103.7	22.0	119.7	120.9	37.0	75.1	33.8
7.5	67.8	105.3	22.5	119.9	121.0	37.5	70.9	34.2
8.0	72.4	109.6	23.0	120.0	121.0	38.0	66.9	33.7
8.5	76.9	111.7	23.5	120.2	120.8	38.5	63.4	33.1
9.0	81.2	114.5	24.0	120.2	120.9	39.0	60.2	32.5
9.5	85.3	118.3	24.5	120.3	121.0	39.5	57.3	32.2
10.0	89.2	121.3	25.0	120.4	120.9	40.0	54.7	32.1
10.5	93.1	120.8	25.5	120.5	120.9	40.5	52.3	31.9
11.0	96.6	120.3	26.0	120.6	121.0	41.0	50.2	31.7
11.5	99.7	120.8	26.5	120.6	120.9	41.5	48.2	31.5
12.0	102.3	120.7	27.0	120.6	120.8	42.0	46.6	31.4
12.5	104.7	120.9	27.5	120.7	116.7	42.5	45.0	31.3
13.0	106.8	120.9	28.0	120.5	111.8	43.0	43.6	31.4
13.5	108.5	120.8	28.5	119.9	111.7	43.5	42.3	31.3
14.0	110.1	121.1	29.0	118.9	106.8	44.0	41.1	31.2
14.5	111.5	120.8	29.5	117.8	106.3	44.5	40.1	31.3

ところで, Ball 法の熱伝達曲線は, 雰囲気温度 RT が時刻 t の関数ではなく, 一定である必要がある (そうでないと変数分離ができない). このことから, カムアップ期があり, 例えばこれが台形型の雰囲気温度変化だった場合, それを長方形型に近似する必要が生じる. この近似は, 通常カムアップタイム (CUT) の 4 割を殺菌時間に組み入れることで行われる⁸⁾.

図 2 に, 雰囲気温度が一定の場合の熱伝達曲線の例を示した. この場合, f を読み取るのは直線部分が 1 対数周

期を通過するのにかかる時間, j を読み取るのは u 軸の切片である. ただし, カムアップタイムが設定されている図 1 の場合は, j を $\text{CUT} \times 0.6$ の時刻の u で近似する⁸⁾. ただし, この近似は必ずしも正確ではないため, j は誤差を含みやすい.

しかしながら, Ball 法は f と j という 2 つのパラメータの求め方にグラフィカルな手法を採用しているためイメージを得やすく, 比較的扱いやすいという利点があると考えられる.

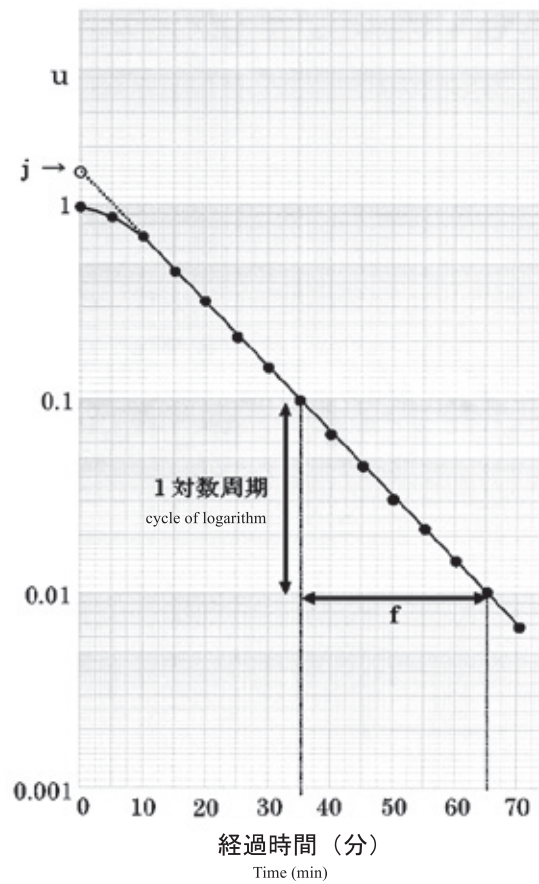


図2 雰囲気温度が一定の場合の熱伝達曲線の例

Fig. 2 Example of heat transfer curve at the constant ambient temperature

2. ニュートンの冷却法則とATS法

Ball法は、前項のようにニュートンの冷却法則の積分形である(9)式を縦軸方向へスライドさせたものであった。しかし、スライド方向は横軸(時間軸)方向でも可能である。

ここで、もとの(1')式に戻って考える。

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(RT - T(t)) \quad \dots\dots\dots (1')$$

$T(t)$: 品温, t : 時間・時刻, RT : 雰囲気温度, k : 比例定数 (>0) (品温 $T(t)$ は, 時刻 t の関数である.)

ここで Δt を微少時間として、微分の表記法を変更すると、

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

(ただし Δt は 0 に限りなく近い時間) $\dots\dots\dots (11)$

(11) 式より (1') 式を書き換えると、

$$\frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = k(RT - T(t)) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\therefore T(t+\Delta t) = T(t) + \Delta t k (RT - T(t)) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\tau = \Delta t k$ とおくと、

$$\therefore T(t+\Delta t) = T(t) + \tau (RT - T(t)) \quad \dots\dots\dots (14)$$

(14) 式は、微分方程式のままニュートンの冷却法則を変形したものである。

さて、ニュートンの冷却法則の式のままでは、実際の製品の熱伝達挙動を再現できないことは前項でも述べた。前項のBall法ではニュートンの冷却法則の式(積分形)を縦軸方向にスライドさせて、実際の熱伝達挙動に合わせたのであるが、今度は雰囲気温度 RT を時刻 t の関数として $RT(t)$ と表記した上、(14) 式の中の雰囲気温度を横軸(時間軸)方向へスライドさせた以下の式を得る。

$$\therefore T(t+\Delta t) = T(t) + \tau (RT(t-\delta) - T(t)) \quad \dots\dots\dots (15)$$

δ : スライド時間(遅れ時間)

この(15)式は向井のATS法の基本式と本質的に同一のものである。

向井は、その報告の中でこの基本式を別の理論で導いているが、いくつかの実験例によりこの基本式が実際の熱伝達挙動に合うことも示している⁴⁻⁷⁾。ATS法の基本式は、ニュートンの冷却法則によって得られる微分形の式の中の雰囲気温度を、実際の熱伝達挙動に合わせるために、ATS法すなわち「雰囲気温度スライド法」という名のとおり、時間軸方向へスライドさせた実験法則と言える。

しかしながら、(15)式における τ は微少時間 Δt 、つまり近似的には測定時間間隔に影響してしまうパラメータである問題がある。すなわち、同じ温度履歴のデータを利用しても、例えば3秒ごとのデータを使ったか、30秒ごとのデータを使ったかで τ の値が変わってしまうという問題である。そのため、ニュートンの冷却法則の比例定数（本報内では“ k ”）をそのまま使用した方が良いと考える。

3. Ball法とATS法の関連

いずれの基本式もニュートンの冷却法則を変形、スライドさせることにより導出が可能であった。このことより、ATS法は微分方程式のままの形であるが、Ball法は積分形となっている点で異なっているのみであり、実は本質的には両者は同じものであるといえる。時刻 t 以外のパラメータは両者2つであり、それぞれの関係を以下のように考察した。

1) 熱伝達勾配に関与するパラメータ：Ball法の f とATS法の τ

$$f = \frac{1}{(\log e)k}, \quad \tau = \Delta t k \text{ であり,}$$

k が共通なので k を消去すると、

$$\frac{1}{(\log e)f} = \frac{\tau}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\therefore \tau = \frac{\Delta t}{(\log e)f} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{1}{\log e} \approx 2.3026 \text{ であるので,}$$

$$\tau \approx 2.3026 \frac{\Delta t}{f} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$(\text{または, } k \approx \frac{2.3026}{f})$$

なお、微少時間 Δt は、実務上、品温測定機による温度の測定時間間隔とすることになる。

2) 遅れ時間に関与するパラメータ：Ball法の j とATS法の δ

$$j = \frac{RT-IT'}{RT-IT} \quad (IT': \text{架空の初品温}) \text{ である}^{8)}.$$

(10)式を変形して、

$$t = f \log \left(j \frac{RT-IT}{RT-IT'} \right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

IT' が IT となるまでに要する遅れ時間 δ は、

$$\delta = f \log \left(j \frac{RT-IT}{RT-IT'} \right) - f \log \left(j \frac{RT-IT}{RT-IT'} \right) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\therefore \delta = f \log j \quad \dots\dots\dots (21)$$

4. Ball法とATS法のパラメータの整合性の確認と考察

両者ともニュートンの冷却法則を変形して導出されるものであるため、本来両者のパラメータの間には整合性が得られるはずである。そこで、一例として実際の測定データ（表1、図1）を利用して整合性を確認した。

図1（Ball法の熱伝達曲線）の熱伝達曲線の近似式（ $\log u = -0.1182t + 0.7052$ ）より、

$$f = -\frac{1}{0.1182} \approx 8.46 \text{ (分)}$$

$$j = 10^{(-0.1182 \times 6 + 0.7052)} \approx 0.991$$

（ j の読み取り時間はCUT 10分 $\times$ 0.6=6分）

次に、同じデータを用いATS法による計算を実施した（計算過程は割愛する）。

その結果、実測値とATS法による収斂計算値が極めてよく一致していた。この結果により、 $\tau = 0.0169$ 、 $\delta = 33.75$ （秒）と求められた。なお、微少時間（時間刻み） Δt は、3.75秒とした。

以上の計算結果に基づき、Ball法とATS法の整合性を確認した。

まず熱伝達勾配に関与するパラメータであるBall法の f とATS法の τ の整合性を確認するため、Ball法のパラメータよりATS法のパラメータを計算した。

$$\tau = 2.3026 \frac{\Delta t}{f} \text{ に } f = 8.46 \text{ 分} = 507.6 \text{ 秒と時間刻み } \Delta t = 3.75$$

秒を代入すると、

$$\tau = 2.3026 \frac{3.75}{507.6} \approx 0.0170$$

となり、 τ はATS法で求めた数値に極めて近い値となり、整合性が認められた。

次に、遅れ時間に関与するパラメータであるBall法の j とATS法の δ の整合性を確認するため、Ball法のパラメータよりATS法のパラメータを計算した。

$\delta = f \log j$ に、 $f = 507.6$ 秒、 $j = 0.991$ を代入すると、

$$\delta = 507.6 \log 0.991 \approx -1.99 \text{ (秒)}$$

となり、 δ は全く合わなかった。これは、Ball法の近似に

問題があるためと考えられた。

そこで、逆に ATS 法の δ から Ball 法の j を計算すると、

$$j = 10^{\frac{\delta}{7}} = 10^{\left(\frac{33.75}{507.6}\right)} \approx 1.165$$

となった。ここで j がこの値となるよう、熱伝達曲線の u の読み取り時刻を逆算すると、

$$t = \frac{0.7052 - \log 1.165}{0.1182} \approx 5.4 \text{ (分)}$$

これは通常の近似での読み取り時刻である 6 分の位置に近い。したがって、ATS 法と Ball 法の計算結果それぞれの整合性があり、Ball 法と異なり近似がない分 ATS 法により求められたパラメータの方が正確であるものと考えられた。

5. 総合考察

向井の ATS 法の基本式は、原論文に書かれた方法からだけではなく、ニュートンの冷却法則からでも説明が可能であった。その途中、特に仮定・前提は必要なく、実際の熱伝達挙動に合うように雰囲気温度をスライドさせたのみであった。そのため、ATS 法の最終的な基本式を使うことは、実務的には何ら問題がないことは明白である。さらに、パラメータを求める際に Ball 法のようなカムアップ期の雰囲気温度の近似がないことから、ATS 法は、Ball 法より正確なパラメータを簡単に求めることができると考えられる。

ATS 法と Ball 法のそれぞれ 2 つのパラメータには関連・整合性が認められ、相互変換が可能であった。このことは Ball 法による f と j が正確に得られていれば、ATS 法による精度の高いシミュレーションが簡単な表計算でできることを示しており、すなわち過去の f と j についての知見も ATS 法にて利用可能であることを示している。このことにより、ATS 法の用途が大きく広がるものと期待される。また逆に、ATS 法にて求められた正確なパラメータが Ball 法で利用可能となったことにも意義があり、極論すれば Ball 法のパラメータを正確に得るために、ATS 法によるフィッティングが利用できるようになったともいえる。

実用的には、Ball 法はグラフィカルな方法で f と j の 2 つのパラメータとも同時に求まるのに対し、ATS 法では表計算ソフト中で収斂計算によるフィッティングで求める手法をとっているため、少々計算過程が理解しにくく、また Ball 法でいう加熱曲線や熱伝達曲線が途中で折れ曲がるタイプのものでは、折れ曲がる点を見ただけで把握できないなどの使いにくさがある。そのため、ATS 法は、有用な熱履歴のシミュレート手法となるものの、パラメータを求める手法については、より使いやすいようにモディファイする必要もまだ残されているものと考えられる。

6. 結論

- 1) Ball 法の熱伝達曲線の基本式も、ATS 法の基本式も、ニュートンの冷却法則の微分方程式を変形し、実際の熱伝達挙動に合うようにスライドさせることにより説明が可能であった。すなわち、根底となるものは両者同一であると考えられる。
- 2) Ball 法と ATS 法のそれぞれ 2 つのパラメータは相互変換可能であった。

$$\tau \approx 2.3026 \frac{h}{f} \quad (\text{または、} k \approx \frac{2.3026}{f})$$

$$\delta = f \log j$$

このことから、過去の Ball 法の知見（パラメータ）は ATS 法でも利用可能であり、その逆も可能である。

- 3) Ball 法の j は求める際に通常カムアップ期の雰囲気温度変化について近似が入るが、ATS 法の δ には近似が入らない。そのため、ATS 法の方が、求められたパラメータは正確であると考えられる。
- 4) ATS 法の τ は、測定時間刻み Δt ごとに変ってしまう問題がある。 $\tau = \Delta t \times k$ であることから、測定時間刻み Δt を分離した k をパラメータとして使った方がよいと考える。

7. 謝辞

本報を発表するにあたり、ATS 法のワークシートをご提供下さった向井勇氏に、深く感謝申し上げます。

8. 参考資料

- 1) Ball, C. O., Olson, F. C. W. : Sterilization in Food Technology, McGraw-Hill Book Company, inc., New York (1957)
- 2) Hayakawa, K. : Experimental Formulas for Accurate Estimation of Transient Temperature of Food and Their Application to Thermal Process Evaluation, Food Technol., **24**, 1407-1418 (1970)
- 3) Hayakawa, K. : Estimating Food Temperatures during Various Processing or Handling Treatments, J. Food Sci., **36**, 378-385 (1971)
- 4) 向井勇, レトルト殺菌における食品温度履歴の簡便な推定法, 日本食品工学会誌, **7**, 197-205 (2006)
- 5) 向井勇, ATS 法の検証 その 1, (社)日本缶詰協会第 56 回技術大会発表 (2007)
- 6) 向井勇, ATS 法の検証 その 2, (社)日本缶詰協会第 57 回技術大会発表 (2008)
- 7) 向井勇, レトルト殺菌における ATS 法 (雰囲気温度スライド法) の検証, 日本食品工学会誌, **9**, 167-179 (2008)
- 8) 松田典彦, 藤原忠 : 容器詰食品の加熱殺菌 (理論および方法) 第 3 版, (社)日本缶詰協会, (1993)